Si $x \in H_1 \cap H_2$ alors $x^{-1} \in H_1 \cap H_2$ car H_1 et H_2 sont deux sous groupes.

Conclusion : L'intersection de deux sous-groupes de $\mathbb{Z}$ est un sous-groupes.

TD 3 : L2, M33 GROUPES SYMETRIQUES.

Exercice 1 : $a, b, c \in S_3$.

(1) S_3 est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$

Card $S_3 = 3! = 6$.

L'application I est dans S_3.

La transposition $\sigma_{1,3} = (1,3) \in S_3$.

$$\sigma_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3)$$

$\sigma_{1,2} = (1,2) \in S_3$ $\sigma_{2,3}$ $(2,3) \in S_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = c_1 = (1\ 2\ 3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = c_2 = (1\ 3\ 2)$$

Ce sont des cycles de longueur 3 et deux cycles de longueur 3.

(2)

$\circ$	Id	(1,3)	(1,2)	(2,3)	(1,2,3)	(1,3,2)
Id	Id	(1,3)	(1,2)	(2,3)	(1,2,3)	(1,3,2)
(1,3)	(1,3)	Id.	(1,2,3)	(1,3,2)	(1,2)	(2,3)
(1,2)	(1,2)	(1,3,2)	Id	(1,2,3)	(2,3)	(1,3)
(2,3)	(2,3)	(1,2,3)	(1,3,2)	Id	(1,3)	(1,2)
(1,2,3)	(1,2,3)	(2,3)	(1,3)	(1,2)	(1,3,2)	Id
(1,3,2)	(1,3,2)	(1,2)	(2,3)	(1,3)	Id	(1,2,3)

$$(1,3) \circ (1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ \cancel{3} & 2 & \cancel{3} \end{pmatrix} = (1, \cancel{2}, 3)$$

$(1,2)\circ(1,3,2) = (1,3)$

$(1,3)\circ(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$(1,2)\circ(1,3) = (1,3,2)$

$(1,2,3)\circ(1,3,2) = (1)(2)(3) = Id$.

$(1,2,3)\circ(1,2,3) = (1,3,2)$

(3) Ordre

$\sigma(I) = 1 \quad \sigma(1,3) = 2 \quad \sigma(1,2,3) = 3$.

(4) Sous-groupes de $(S_3, \circ)$:

$\{Id, \circ\}$, $\left.\begin{array}{l} \{(1,3), Id\} = <(1,3)> \\ \{(1,2), Id\} \\ \{(2,3), Id\} \end{array}\right\}$ ss-groupe d'ordre 2.

Le groupe $<(1,2,3)> = \{Id, \underset{g}{(1,2,3)}, \underset{g^2}{(1,3,2)}\}$

(5) Centre de $(S_3, \circ)$

Soit $(G, *)$ un groupe.

$Z(G) = \{x \in G \,/\, x*y = y*x \ \forall y \in G\}$.

$(Z(G), *)$ est un sous-groupe de G.

$Id \in Z(G)$.

$Z(S_3)$ ne contient pas les transpositions.

exemple : $(1,3)\circ(1,2) = (1,2,3) \neq$
$(1,2)\circ(1,3) = (1,3,2)$

↳ $(1,3)$ ne commute pas avec $(1,2)$.

$\Rightarrow \{(1,2), (1,3)\} \notin Z(S_3)$.

$(1,2)\circ(1,2,3) = (2,3) \neq (1,2,3)\circ(1,2) = (1,3)$

Le cycle $(1,2,3) \in Z(G)$

• EXERCICE 5 :

S_5 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$c_1 = (1,3,2) \circ (4,5) = (1,2) \circ (1,3) \circ (4,5)$

La transposit° $(4,5)$ a un support disjoint de celui du cycle $(1,3,2)$ donc $\vartheta(\sigma) = \text{ppcm}(2,3) = 6$.

Signature d'une transposition est égale à -1.
Prop : Toute permutations se décompose en produit de transposit°
~~La signature et Soit~~ $\cancel{\sigma = 1}$

Signature $(-1)^3 = -1$.

• EXERCICE 4 :

Soit S_7. $S_7 = f \circ g \circ f^{-1}$

(1) $(1\ 2)(1\ 3\ 5\ 7\ 2)(1\ 2)$ à calculer :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 5\ 7)$$

(2) Ordre max des elts de S_7 : $7! = 5040$.

• EXERCICE 6 :

$\infty\ a = \underbrace{(1\ 5\ 3\ 4\ 7)}_{c_1}\ \underbrace{(2\ 6)}_{\tau} = (1\ 7)(3\ 4)(5\ 3)(5\ 7)(2\ 6)$

a, groupe symétrique d'ordre 10

$\varepsilon(a) = (-1)^5$ $\quad |c_1| = 5 \quad |\tau| = 2 \Rightarrow |a| = 5 \times 2 = 10$.

car c_1 et τ sont des supports disjoints.

$a^{2005} = (1\ 5\ 3\ 4\ 7)^{2005}\ (2\ 6)^{2005}$

Puisque $(1\,5\,3\,4\,7)$ est un groupe 5-cycle, on a $(1\,5\,3\,4\,7)^5 = id$.

TD 3 : GROUPES SYMETRIQUES — le 31/10/2005.

• EXO 6 (SUITE)

De même $(2\,6)^2 = id$.

On en déduit les égalités suivantes :

$(1\,5\,3\,4\,7)^{2005} = ((1\,5\,3\,4\,7)^5)^{401} = Id^{401} = Id.$

$(2\,6)^{2005} = ((26)^2)^{1002}(2\,6) = id\,(2\,6) = (2\,6)$

• Ainsi on a $a^{2005} = (2\,6)$

* $b = (2\,4)(5\,7\,6\,8) = (2\,4)(5\,7)(6\,7)(6\,8)$

b, groupe symétrique d'ordre 4.

$\mathcal{E}(b) = (-1)^4$

$|b| = \text{ppcm}(2,4) = 4$

$b^{2005} = (2\,4)^{2005}(5\,7\,6\,8)^{2005}$

$(2\,4)^{2005} = ((2\,4)^2)^{1002}(2\,4) = (2\,4)$

$(5768)^{2005} = ((5768)^4)^{501}(5768) = (5768)$

• Ainsi on a $b^{2005} = (2\,4)(5\,7\,6\,8) = b.$

* $c = (1\,3\,8)(2\,7)(4\,9\,6\,5) = (13)(38)(27)(49)(69)(56)$

c, groupe symétrique d'ordre 12.

$\mathcal{E}(c) = (-1)^6$ $\quad |c| = \text{ppcm}(3,2,4) = 12.$

$c \in A_9$

$c^{2005} = (1\,3\,8)^{2005}(2\,7)^{2005}(4\,9\,6\,5)^{2005}$

$(1\,3\,8)^{2005} = ((1\,3\,8)^3)^{668}(1\,3\,8) = (1\,3\,8)$

$(2\,7)^{2005} = ((2\,7)^2)^{1002}(2\,7) = (2\,7)$

$(4965)^{2005} = ((4965)^4)^{501}(4\,9\,6\,5) = (4\,9\,6\,5)$

• Ainsi on a $c^{2005} = (1\,3\,8)(2\,7)(4\,9\,6\,5) = c.$

• EXERCICE 7 : S_{12}.

(1) Produits de cycles à supports disjoints :

$\sigma = (1\,6\,11\,8\,3)(2\,12\,5\,9)(4\,10\,7)$

(2) σ en produits de transpositions :

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12 \xrightarrow{\sigma} 6\ 12\ 1\ 10\ 9\ 11\ 4\ 3\ 2\ 7\ 8\ 5 \quad \Big\downarrow \sigma_{1,6}$$

$$1\ 2\ 6\ 10\ 9\ 11\ 4\ 3\ 12\ 7\ 8\ 5 \xleftarrow{\sigma_{2,12}} 1\ 12\ 6\ 10\ 9\ 11\ 4\ 3\ 2\ 7\ 8\ 5$$

$$\sigma_{3,6} \Big\downarrow \quad 1\ 2\ 3\ 10\ 9\ 11\ 4\ 6\ 12\ 7\ 8\ 5 \xrightarrow{\sigma_{4,10}} 1\ 2\ 3\ 4\ 9\ 11\ 10\ 6\ 12\ 7\ 8\ 5 \quad \Big\downarrow \sigma_{5,9}$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 10\ 11\ 12\ 7\ 8\ 9 \xleftarrow{\sigma_{6,11}} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 11\ 10\ 6\ 12\ 7\ 8\ 9$$

$$\sigma_{7,10} \Big\downarrow \quad 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 11\ 12\ 10\ 8\ 9 \xrightarrow{\sigma_{8,11}} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 12\ 10\ 11\ 9 \quad \Big\downarrow \sigma_{9,12}$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12$$

$$\sigma = (1\,6)(2\,12)(3\,6)(4\,10)(5\,9)(6\,11)(7\,10)(8\,11)(9\,12)$$

(3) Parité et ordre de σ :

$|\sigma| = 12!$

- Une permutation est dite paire si sa signature vaut 1.

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^3 = -1$. σ n'est pas paire.

$$\sigma^{2005} = (1\,6\,11\,8\,3)^{2005}(2\,12\,5\,9)^{2005}(4\,10\,7)^{2005}$$

$(1\,6\,11\,8\,3)^{2005} = \left((1\,6\,11\,8\,3)^5\right)^{401} = Id.$

$(2\,12\,5\,9)^{2005} = \left((2\,12\,5\,9)^4\right)^{501}(2\,12\,5\,9) = (2\,12\,5\,9)$

$(4\,10\,7)^{2005} = \left((4\,10\,7)^3\right)^{668}(4\,10\,7) = (4\,10\,7).$

- Ainsi on obtient :

$$\sigma^{2005} = (2\,12\,5\,9)(4\,10\,7).$$

- Si s est un p-cycle, alors on a $s^p = id$.

TD 3 : G.S. | Le 01/11/2005.

• EXERCICE 8 :

$\sigma_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \quad \sigma_2 = (1\ 2\ 3)$

(1) $|\sigma_1| = 5 \quad |\sigma_2| = 3$.

(2) $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = (1\,2\,3\,4\,5)(1\,2\,3)(1\,2\,3\,4\,5)$

ppcm $(5, 3, 5)$

• Exo 4 (SUITE)

(2) Trouver elt d'ordre maximal dans S_7.

$\theta(S_7) = 7!$

$7 = 2 + 3 + 2$

d'où la possibilité de l'existence d'un elt d'ordre

$6 = \text{ppcm}(2, 3, 2)$.

$7 = 6 + 1$

Ordre maximal des elts de S_7 : 12.

$7 = 5 + 2 \quad \text{ppcm}(5, 2) = 10$.

$7 = 3 + 4 \quad \text{ppcm}(3, 4) = 12$.