UNIVERSITÉ D'EVRY VAL D'ESSONNE 2005-2006

L2: M33 (Algèbre et Arithmétique) TD 4: Arithmétique sur $\mathbb{Z}$

Exercice 1. Montrer que tout entier peut s'écrire sous la forme $4k$ ou $4k+1$ ou $4k+2$ ou $4k+3$. En déduire que le carré de tout entier impair est de la forme $8m+1$.

Exercice 2. Combien d'entiers entre 101 et 1001 sont divisibles par 7?

Exercice 3. Ecrire l'algorithme d'Euclide pour:

$$(a=70, b=42); (a=2431, b=1342).$$

Exercice 4. (**PETIT THEOREME DE FERMAT**)

Soit p un entier naturel premier.

1) Montrer que pour tout k, n entiers naturels et k compris entre 0 et n, on a: $C_n^k \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que pour tout k entier naturel compris entre 1 et $p-1$, on a:

$$kC_p^k = p.C_{p-1}^{k-1}.$$

3) Montrez alors par récurrence que pour tout entier naturel n, $n^p - n$ est divisible par p.

Exercice 5.

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, la fraction $\frac{n^3+n}{2n+1}$ est-elle irréductible? Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$, la fraction $\frac{15n^2+8n+6}{30n^2+21n+1}$ est-elle irréductible?

Exercice 6.

On considre l'équation (E) : $36x - 25y = 5$, $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

a) Déterminez deux entiers relatifs u et v tels que $36u + 25v = 1$.

b) Donnez alors une solution particulère de (E).

c) Quel est l'ensemble des solutions de (E) ?

d) (x,y) étant une solution particulière de (E), on appelle d le PGCD de x et y.

Quelles sont les valeurs possibles de d?

Quelles sont les solutions (x,y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux?

Exercice 7. Résolvez les équations suivantes:

1) $x^2 + 5x \equiv 0 \pmod 5$.

2) $x^2 - 5x + 2 \equiv 0 \pmod 7$.

3) $2x^2 + 4x + 1 \equiv 0 \pmod 7$.

4) $(x^2-1)^2 \equiv 9 \pmod{11}$.

Exercice 8.

Résoudre à l'aide du théorème chinois les trois problèmes suivants :

Le problème chinois historique du 4ème siècle auquel est dû le nom du théorème :

Nous avons des objets en nombre inconnu, mais nous savons que :

-si nous les regroupons par paquets de 3, il en reste 2.

-si nous les regroupons par paquets de 5, il en reste 3.

-si nous les regroupons par paquets de 7, il en reste 2.

Combien y-a-t-il d'objets ?

- Un bon chrétien...

Le numéro de l'année de naissance d'un de mes aïeux a la particularité suivante : il est divisible par 2 ; il est divisible par 3 si on lui ôte 1, par 5 si on lui ôte 2, par 7 si on lui ôte 3, et par 11 si on lui ôte 4.

Mais de quelle année s'agit-il donc, sachant que mon ancêtre a toujours été un bon chrétien ?

- Les pirates et le cuisinier...

17 pirates se sont emparés d'un butin composé de pièces d'or identiques. Ils se les partagent équitablement, et donnent le reste, soit 3 pièces d'or, au cuisinier. Mais les pirates se querellent, et 6 d'entre eux meurent. Il reste alors 4 pièces d'or au cuisinier. Ensuite le bateau fait naufrage ; il ne reste que 6 pirates et le cuisinier. Le partage laisse alors 5 pièces à ce dernier. Enfin, le cuisinier décide d'empoisonner le reste des pirates.

Quelle fortune minimale peut-il espérer obtenir ?

Théorème d'Euler-Fermat.

Exercice 1. Déterminer le reste r de la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants :

a) $a = 2001^{1613}$, $b = 143$,

b) $a = 1998^{1380}$, $b = 37$,

Exercice 2. Déterminer les deux derniers chiffres, en base 10, du nombre suivant :

$$a = 2011^{16}.$$