# Algèbre booléennes.

## 1/ Anneau booléen.

entiers exemple ds $\mathbb{Z}$ (l'addition)

A. $3+(5+8) = (3+5)+8$ associativité

C. $3+5 = 5+3$ commutativité

N. $3+0 = 3$ elt neutre (0)

S. $3+(-3) = 0$ symétrique

(multiplication ds $\mathbb{Z}$)

A. $3.(5.8) = (3.5).8$

D. $3.(5+8) = (3.5)+(3.8)$

N. $3.1 = 3$ I $a.a = a$ (projection)

$\oplus$ anneau booléen Bode (mathématicien)

a) anneau unitaire (exemple)

entiers modulo 4 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

$\{0,1,2,3\}$ $2\oplus3 = 1$ $1\oplus3=0$ symétrique.

$2.3 = 2$.

est-il booléen ? (idempotent)

$0.0=0$ ; $1.1=1$ ; $2.2=0$ ; $3.3=1$ Pas d'anneau booléen.

b) entiers modulo 2 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = B_2$

$\{0,1\}$

paire, impaire

| $\oplus$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| $\cdot$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

Mnémotechnie (propté anneau)

C, A, N, S } addition $\oplus$

A, D } multi. $\cdot$

U, I } booléen

Remarque : $3.(5+8) = (3.5)+(3.8)$

$3+(5.8) \neq (3+5).(3+8)$

Propriétés : $a.b = b.a$

$a\oplus a = 0$.

$B_2$ E $\{x_2 \; x_1 \; x_0\}$

| $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | $\alpha$ |
| 1 | 1 | 0 | $\beta$ |
| 1 | 0 | 0 | $\alpha\oplus\beta$ |
| 0 | 1 | 0 | $\alpha.\beta$ |

fonctions de $E$ dans $\mathcal{B}_2$, noté $\mathcal{B}_2^E$.

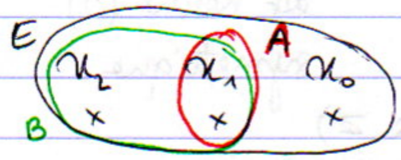
l'élt neutre est noté $0$ tq $0(x) = 0$ pour $\oplus$.

" " " $1$ tq $1(x) = 1$ pour $\circ$.

$x_0 \xrightarrow{\alpha} \alpha(x_0) = 0$.

$x_1 \xrightarrow{\alpha} \alpha(x_1) = 1$

$x_2 \xrightarrow{\alpha} \alpha(x_2) = 0$.




$A \cap B$, $A \cup B$, $\bar{A}$

$\alpha(x) = 1$ si $x \in A$

$= 0$ sinon

$\beta(x) = 1$ si $x \in B$.

$= 0$ sinon.

$\alpha$ et $\beta$ sont des applicat° caractéristiques.

l'application caract. de $A \cap B = \alpha . \beta = \alpha \wedge \beta$

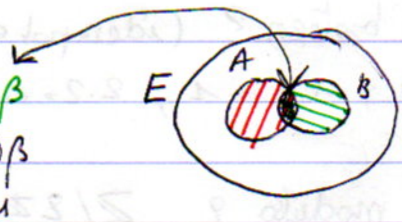
" " $A \cup B \rightarrow$

| $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | $\alpha \vee \beta$ |
| 1 | 0 | 0 | $\alpha \oplus \beta$ |
| 1 | 2 | 0 | $\alpha + \beta$ |
| 1 | 0 | 1 | $\bar{\alpha}$ |

| $\vee$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| $\wedge$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

$\alpha \vee \beta = (\alpha \oplus \beta) \oplus \alpha . \beta$




$x \in A$.
$x \notin B$.

| $\alpha(x)$ | $\beta(x)$ | $\alpha \oplus \beta$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

$\alpha \vee \beta = \alpha \oplus \beta \oplus \alpha . \beta$

$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$

$\bar{\alpha}$ est une application caractéristique de $\bar{A}$.

| $\mathcal{P}(E)$ | $\mathcal{B}_2^E$ |
|---|---|
| $E$ | $1$ |
| $\emptyset$ | $0$ |
| $A \cap B$ | $\alpha \wedge \beta = \alpha . \beta$ |
| $A \cup B$ | $\alpha \vee \beta = \alpha \oplus \beta \oplus \alpha . \beta$ |
| $\bar{A}$ | $\bar{\alpha} = 1 \oplus \alpha$. |

$a . b = a \wedge b$

$a \oplus b = (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$

• Treillis :

$m = 30$

$2 \leq c$

$3 \leq c$

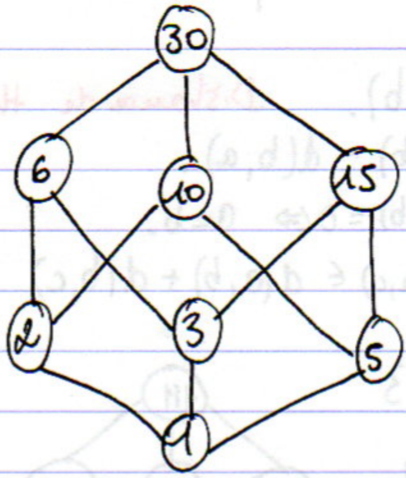


Diagramme de Hasse.

b complément de a

$a \vee b = 1$
ppcm 30

$a \wedge b = 0$
pgcd 1

## fonctions booléennes.

$E \to B_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

application caractéristique

$B_2^E$ : algèbre booléenne.

n éléments

$x_{n-1} \dots x_2 x_1 \; x_0$

$\times \quad \times \; \times \; \times$

$1 \dots 0 \; 1 \; 0$ ← mot de n binary digits
bits

nb de choix $\underbrace{2 \times \dots \times 2 \times 2 \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n$.

$B_2^n$ : algèbre booléenne des mots de n bits. ex: $001 \vee 010 = 011$

$0 = 0\dots00 \quad 1 = 1\dots11$

$\oplus, \cdot, \vee, \wedge$ : opérations logiques (sur les mots de n bits)

$$\begin{array}{r} 1011010111101001 \\ \wedge\; 0000000011111111 \\ \hline 0000000011101001 \end{array}$$

U.A.L : unité arithmétique et logique.

poids : $p(1011) = 3$.

propriété : $p(a \vee b) = p(a) + p(b) - p(a \wedge b)$

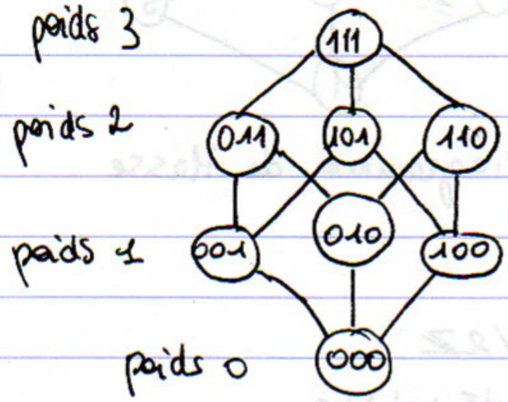
On a vu : $\alpha \vee \beta = \alpha + \beta - \alpha . \beta$

$\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta - 2\alpha.\beta = (\alpha \vee \beta) - \alpha.\beta$

$\leftrightarrow p(a \oplus b) = p(a \vee b) - p(a \wedge b)$

$p(a \oplus b) = d(a,b)$. Distance de Hamming $\rightarrow$ codes detecteurs et correcteurs d'erreur.

- symétrie $d(a,b) = d(b,a)$.
- reflexivité $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$.
- ineg. triang. $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$




$a \leq b$ si $a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a$

$$\begin{array}{r} \oplus\ 001 \\ 010 \\ \hline 011 \end{array}$$

Diagramme de Hasse de $B_2^3$.

Théorème de Stone : $(B_2^E, \vee, \wedge, -) \sim (\mathcal{P}(E), \cup, \cap, -)$

$\wr$

$(B_2^n, \vee, \wedge, -)$

1 $(a \oplus b) \vee (a \oplus c) = (a \vee b \vee c) \wedge (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c})$ à démontrer.

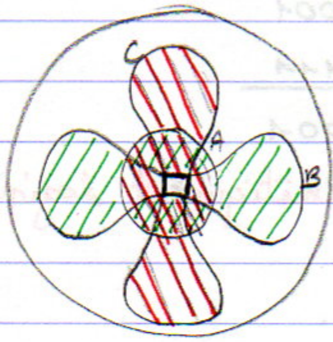
$(A, \vee, \wedge, -, 0, 1) \sim (\mathcal{P}(E), \cup, \cap, -, \{\emptyset, E)$

$2^n$ elt $\quad$ n elt

$a \leftrightarrow A$ ; $b \leftrightarrow B$ ; $c \leftrightarrow C$.

$a \oplus b$ $A \Delta B$

$a \oplus c$ $A \Delta C$




| A | B | C |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | F | V |
| F | V | F |
| F | V | V |
| V | F | F |
| V | F | V |
| V | V | F |
| V | V | V |