

DS - sans documents

1. Distributivité.

- a) Exhiber un exemple dans l'anneau des entiers relatifs \mathbb{Z} montrant que l'addition $+$ n'est pas distributive par rapport à la multiplication \cdot .
- b) Exhiber un exemple dans l'anneau booléen $\mathcal{B}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ montrant que l'addition \oplus n'est pas distributive par rapport à la multiplication \cdot .

2. Algèbre des parties d'un ensemble.

On note x l'abscisse d'un point dans le plan et y son ordonnée. L'ensemble E est le disque de rayon 2 du plan, $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. A est la partie de E dont les éléments satisfont $x \geq 0$, B est la partie de E dont les éléments satisfont $y \leq 0$, et C est le disque de rayon 1, $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- a) Représenter à l'aide d'un dessin la partie de E égale à $A \wedge (B \vee C)$.
- b) Représenter à l'aide d'un dessin la partie de E égale à $A \oplus B \oplus C$.

3. Conjonction et disjonction.

- a) Quels sont les éléments idempotents de l'anneau commutatif $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +, \cdot)$?
- b) Soit \mathcal{A} l'ensemble des éléments idempotents trouvés en réponse à la question a), on note \oplus l'opération dans \mathcal{A} définie par $a \oplus b = a + b - 2a \cdot b$, alors $(\mathcal{A}, \oplus, \cdot)$ est un anneau booléen. Les opérations de l'algèbre booléenne associée à cet anneau sont notées \vee et \wedge . Etablir les tables de "conjonction" et de "disjonction", qui associent à chaque paire (a, b) d'éléments de \mathcal{A} , respectivement, $a \wedge b$ et $a \vee b$.

4. Algèbre des mots de n bits, \mathcal{B}_2^n .

- a) Trouver l'élément x de \mathcal{B}_2^8 qui est solution de l'équation $x \oplus 01110100 = 10101010$.
- b) L'équation $x \vee 01110100 = 11110101$ admet plusieurs solutions $x \in \mathcal{B}_2^8$.
 - Donner la solution minimale x_{\min} de cette équation, c'est-à-dire la solution x_{\min} telle que toute autre solution x satisfait $x_{\min} \prec x$.
 - Donner la solution maximale x_{\max} de cette équation, c'est-à-dire la solution x_{\max} telle que toute autre solution x satisfait $x \prec x_{\max}$.

5. Algèbre booléenne ?

On définit les opérations sur les entiers $a \vee b = p.p.c.m.(a, b)$ et $a \wedge b = p.g.c.d.(a, b)$.

- a) L'ensemble \mathcal{E}_4 des diviseurs de 4, muni des opérations \vee et \wedge , est-il une algèbre booléenne ? Pourquoi ?
- b) Dessiner le diagramme de Hasse de l'ensemble \mathcal{E}_8 des diviseurs de 8, muni des opérations \vee et \wedge . Est-ce que 1 admet un complément ? Si oui, lequel ? Est-ce que 2 admet un complément ? Si oui, lequel ?

6. Fonction booléenne

On considère la fonction booléenne de \mathcal{B}_2^2 dans \mathcal{B}_2 : $f(x_1, x_0) = \overline{x_1 \cdot \overline{x_0}} \vee x_0$.

- a) Donner la présentation en treillis (basée sur le diagramme de Hasse de l'ensemble de départ \mathcal{B}_2^2) de $f(x_1, x_0)$.
- b) La fonction $f(x_1, x_0)$ est-elle positive ? négative ? ni l'un, ni l'autre ? Expliquer pourquoi.
- c) Représenter $f(x_1, x_0)$ sous forme d'une disjonction de mintermes.

DS du 8 décembre 2005 / partie D. Dupont

Exercice 1

Soit un afficheur 7 segments donnant les chiffres de 0 à 7.

Donner à l'aide de multiplexeurs 2 entrées le circuit du segment du haut et du bas.

Exercice 2

Donner le schéma d'un soustracteur sous forme de circuit séquentiel.