# PRELIMINAIRES : PROBA, STATS

Le 21/09/05

## I/ Théorie des ensembles.

### a) Définition de base

$\Omega$ : un ensemble quelconque

ex : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\Omega = \mathbb{R}$ $\Omega = \mathbb{N}$

$A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ 2 sous-ensembles de $\Omega$.

Notations

* $\bar{A} = \{w \in \Omega \,;\, \omega \notin A\}$ (complémentaire de A)
* $A \cup B = \{w \in \Omega, w \in A$ ou $w \in B\}$
* $A \cap B = \{w \in \Omega, w \in A$ et $w \in B\}$

R : On note aussi $\bar{A} = A^C$.

Propriétés : Commutativité : $A \cup B = B \cup A$ ; $A \cap B = B \cap A$

Associativité : si $C \subset \Omega$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

### b) Famille d'ensembles

Si on a plusieurs ensembles, on les numerote

→ soit I, un ensemble d'indices.

$I = \{0,1,2,\dots,n\}$ avec $n \in \mathbb{N}$ fixé.

ou $I = \{1,2,\dots,n\}$

On considéra le cas où l'on a une infinité dénombrable d'ensembles. $I = \mathbb{N}$ ie on a une famille $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ d'ensembles.

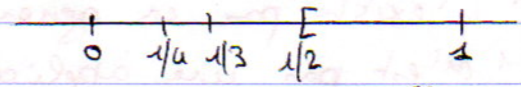
Notations :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega, \exists i \in I, w \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{w \in \Omega, \forall i \in I, w \in A_i\}$$

ex : $\Omega = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$A_n = [\frac{1}{n}, 1]$




$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = ]0,1] \qquad \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \{1\}$$

c) Passage au complémentaire et distributivité.

Soit $I$, un ensemble d'indices et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de $\Omega$.

Prop^tés :

(i) $\left(\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}\right) = \bigcap_{i\in I} \bar{A_i}$ (ii) $\left(\overline{\bigcap_{i\in I} A_i}\right) = \bigcup_{i\in I} \bar{A_i}$

(iii) Si $A \subset B$ alors $\bar{B} \subset \bar{A}$

dem : (i) Soit $\omega \in \left(\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}\right)$

$\bigcup_{i\in I} A_i = \{\omega ;\ \exists i \in I,\ \omega \in A_i\}$

$\omega \in \left(\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}\right) \Leftrightarrow \omega \notin \bigcup_{i\in I} A_i$

$\Leftrightarrow \forall i \in I,\ \omega \notin A_i.$

$\Leftrightarrow \forall i \in I,\ \omega \in \bar{A_i}$

$\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{i\in I} \bar{A_i}$

• Prop^tés : Soit $B \subset \Omega$

(i) $B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (B \cup A_i)$ (distributivité de $\cup$ sur $\cap$).

(ii) $B \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)$

## II) Applications entre ensembles

$\Omega, \Omega'$ 2 ensembles quelconques

$f : \Omega \to \Omega'$ une application de $\Omega$ dans $\Omega'$.

Notations : (i) Soit $A \subset \Omega$,

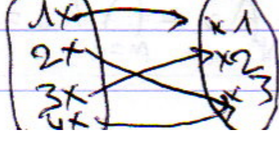
$f(A) = \{f(\omega),\ \omega \in A\} = \{\omega' \in \Omega',\ \exists \omega \in A,\ f(\omega) = \omega'\}$

(ii) Soit $B \subset \Omega'$, $f^{-1}(B) = \{\omega \in A,\ f(\omega) \in B\}$

R : Ainsi $f(A) \subset \Omega'$ et $f^{-1}(B) \subset \Omega$

⚠ $f^{-1}$ n'existe pas en général !

$f^{-1}$ n'est pas une application.

ex : 

$f(\{1,2,3\}) = \{1,3\}$ $f^{-1}(\{1\}) = \{1,3\}$

$f^{-1}(\{1,3\}) = \{1,2,3,4\}$ $f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$

• Propté : Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensemble de $\Omega$ et $(B_i)_{i\in I}$ " " $\Omega'$.

(i) $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

(ii) $f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

(iii) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$

(iv) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$

(v) Si $B \subset \Omega'$, $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(\bar{B})$

## 3) Somme de nombres.

### a) Sommes finies.

On considère $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $a_1, \dots, a_n$ n nb réels

On pose $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

### b) Sommes infinies.

Def : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nb réels $\oplus$.

Si $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$ existe et est égale à $l \in \mathbb{R}^+$, alors on pose : $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = l$.

Rq : Bien voir que qd on écrit $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = l$.
il faut d'abord vérifier que $\lim \sum_{i=1}^{n} a_i$ existe

ex. fondamental : Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \in ]0,1[$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{a_0}{1-q}$

et donc $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \frac{a_0}{1-q}$

En particulier : $q = 1/2$, $\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-1/2} = 1$.

THEORIE DES PROBABILITÉS — le 21/09/05

## 0/ Introduction

Il s'agit de modéliser des phénomènes "aléatoires"
* lancer de dés
* prod. de tiges d'acier, elles ne sont pas tts de la m long.
* radioactivité → tps de désintégrat°.
* combler un manque d'informat°; météo.
  * trajectoires d'une particule

ou de faire des statistiques.
* estimer un paramètre caractérisant une population
* sondages (à partir d'un échantillon inférer des proptés à une population)
* faire des tests.

## 1/ Espace de probabilité

### a) Vocabulaire.

On considère une experience aléatoire.

$\Omega$ : ensemble des issues.

ex : lancer d'un dé, $\Omega$ = ensemble des 6 faces du dé.

On utilise la théorie des ensembles pour formaliser le vocabulaire probabiliste.

Soit $A \subset \Omega$, A est un évènement. $\omega$ une issue.

$\omega \in A \Leftrightarrow$ l'évènement A est réalisé par $\omega$ :

| langage ensembliste | | langage probabiliste |
|---|---|---|
| ensemble A | $\longleftrightarrow$ | évènement A |
| $\bar{A}$ | $\longleftrightarrow$ | évènement contraire de A. |
| $\Omega$ | $\longleftrightarrow$ | " certain. |
| $\emptyset$ | $\longleftrightarrow$ | " impossible. |
| $A \cap B$ | $\longleftrightarrow$ | A et B réalisés. |
| $A \cup B$ | $\longleftrightarrow$ | $A \cup B$ réalisé |
| $A \subset B$ | $\longleftrightarrow$ | A implique B |
| A et B disjoints ($A \cap B = \emptyset$) | $\longleftrightarrow$ | A et B incompatibles |

## b) Tribu.

Soit $\Omega$ un ensemble quelconque.

Définition : On appelle tribu sur $\Omega$ une famille de parties de $\Omega$, $\mathcal{F}$, telles que :

* $\Omega \in \mathcal{F}$
* $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
* Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties appartenant à $\mathcal{F}$ alors $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Propté : Soit $\mathcal{F}$, une tribu sur $\Omega$

* $\phi \in \mathcal{F}$
* Si $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cup B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$

## c) Probabilité :

Soit $\Omega$ un ensemble quelconque, muni d'une tribu $\mathcal{F}$.

Déf : On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ une applicat° $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ telle que

* $P(\Omega) = 1$
* Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties appartenant à $\mathcal{F}$, disjointes 2 à 2, alors

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$$

Propté : Soit $P$, une proba. sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

* $P(\phi) = 0$
* $\forall A \in \mathcal{F}, P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
* $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
* $A, B \in \mathcal{F}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Déf : $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s'appelle espace de probabilité.

## d) Exemples.

* lancer de dé. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et on pose

$\forall A \subset \Omega$, $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{6}$

De façon générale si $\Omega$ est fini, on prend $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et une probabilité possible est la probabilité uniforme définie par $\forall A \subset \Omega$, $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

⚠ Ce n'est pas la seule proba. possible !

* Si $\Omega$ est fini, $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ une proba. est définie de façon unique par la donnée de n nb ⊕ $a_1, a_2, \dots, a_n$ tq $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$
et $\forall A \subset \Omega$, $P(A) = \sum a_i$
en particulier $P(\{x_i\}) = a_i$