THEORIE DES PROBABILITES — le 21/09/05

De façon générale si Ω est fini, on prend $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et une probabilité possible est la probabilité uniforme définie par $\forall A \subset \Omega$, $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

⚠ Ce n'est pas la seule proba. possible !

× Si Ω est fini, $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ une proba. est définie de façon unique par la donnée de n nb ⊕ $a_1, a_2, \dots, a_n$ tq $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$

et $\forall A \subset \Omega$, $P(A) = \sum a_i$

en particulier $P(\{x_i\}) = a_i$

Si Ω est infini dénombrable i.e.

$\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ (en général $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}^*$)

On définit de façon unique une probabilité P par la donnée d'une suite de réels positifs.

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$ tels que $\sum_{1}^{+\infty} \mu_i = \lim \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$.

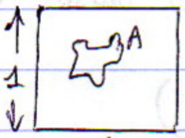
P vérifie

$\forall i \in \mathbb{N}^*$, $P(\{x_i\}) = \mu_i$ et donc $\forall A \subset \Omega$, $P(A) = \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ x_i \in A}} \mu_i$

Rappel : dans ce cas, la tribu est $\mathcal{P}(\Omega)$

exemple : $\Omega = \mathbb{N}^*$, $\mu_i = \frac{1}{2^i}$ $\left(\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = 1\right)$ on parle de proba. géométrique)

<u>Un exemple continu : Le carré 1×1 :</u>



$\Omega = [0,1] \times [0,1]$

$P(A) = \text{Aire}(A)$ Problème : $\mathcal{F} = ??$

On approxime A par "des petits carrés" puis on passe à la limite.

↳ d'où la notion de stabilité par union dénombrable ($\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$)

On prend alors pour $\mathcal{F} = \{$ensemble des parties de $[0,1]\times[0,1]$ qui peuvent être approximées par des petits carrés$\}$.

On peut montrer que $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}([0,1]\times[0,1])$
↳ Une partie quelconque du plan n'a pas forcément d'aire !!!!

Ici $\mathcal{F}$ s'appelle la tribu borélienne de $[0,1]\times[0,1]$.
De façon générale, sur $\mathbb{R}^d$ on considérera la tribu borélienne notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, c'est la + petite tribu contenant les pavés de $\mathbb{R}^d$.

I/ Probabilité conditionnelle et indépendance.

1) Probabilité conditionnelle.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité.

Thm et définition.
Soit $B \in \mathcal{F}$ fixé, $P(B) > 0$. L'application de $\mathcal{F}$ dans $[0,1]$ qui à $A \in \mathcal{F}$, associe $\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ est une PROBABILITÉ.
notée P_B (ou $P(B)$).
$\forall A \in \mathcal{F}$, $P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ on dit "proba. de A sachant B".

Démonstration : $P_B(\Omega) = \dfrac{P(\Omega\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$.

Si (A_i) est une suite d'elts disjoints.

$$P_B\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \frac{P(\cup A_i)\cap B}{P(P)} = \frac{P\left(\bigcup_i (A_i\cap B)\right)}{P(B)}$$

Les (A_i) sont disjoints donc les $(A_i \cap B)$ aussi. Comme P est une probabilité.

$$P\left(\bigcup_i (A_i\cap B)\right) = \sum_i P(A_i\cap B)$$

$$P_B\left(\bigcup_i A_i\right) = \frac{\sum_i P(A_i\cap B)}{P(B)} = \sum_i \frac{P(A_i\cap B)}{P(B)} = \sum_i P_B(A_i)$$

⚠ Bien voir que P_B est une proba.

• Propriétés : Soit $B \in \mathcal{F}$ fixé, $P(B) > 0$
(i) $\forall A \in \mathcal{F}$, $P(A\cap B) = P_B(A)\times P(B) = P(A/B)\times P(B)$.

(ii) Formule des probabilités totales.

Soit $(B_i)_{i\in I}$ une partition de Ω (i.e $\bigcup_{i\in I} B_i = \Omega$ et les (B_i) sont disjoints).

Alors : $\forall A \in \mathcal{F}$, $P(A) = \sum_{i\in I} P_{B_i}(A) \times P(B_i) = \sum_{i\in I} P(A/B_i) \times P(B_i)$

↳ Démonstration :

(ii) $A = A \cap \Omega = A \cap (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} (A \cap B_i)$

Les (B_i) sont disjoints donc les $(A \cap B_i)$ aussi :

$P(A) = \sum_{i\in I} P(A \cap B_i) = \sum_{i\in I} P(A/B_i) \times P(B_i)$

→ exemple : On lance 2 dés équilibrés.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, P proba. uniforme.

$\forall (i,j) \in \Omega$, $P(\{i,j\}) = 1/36$.

A = La somme des dés est 4.

B : Chaque dé affiche un nb pair.

$A = \{(1,3), (2,2), (3,1)\} \Rightarrow P(A) = 3/36 = 1/12$.

$B = \{2,4,6\} \times \{2,4,6\}$ card $(B) = 9$.

↳ $P(B) = 9/36 = 1/4$.

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$A \cap B = \{(2,2)\} \Rightarrow P(A \cap B) = 1/36$.

$P(A/B) = \frac{1/36}{9/36} = 1/9$.

• Theorème : Soit $(B_i)_{i\in I}$ une partition de Ω et $\forall i \in I$, $P(B_i) > 0$. Soit $j \in I$ fixé, $A \in \mathcal{F}$ tel que $P(A) > 0$. alors

$$P(B_j/A) = \frac{P(A/B_j) \times P(B_j)}{\sum_{i\in I} P(A/B_i) \times P(B_i)}$$

↳ Démonstration : $P(B_j/A) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)}$

formul des probabilités totales :

$P(A) = \sum_{i\in I} P(A/B_i) \times P(B_i)$ $P(A \cap B_j) = P(A/B_j) \times P(B_j)$

Exemple : On considère une population. Une maladie sévit. 30 % de la population est porteur de la maladie.
On a un test de dépistage, avec pour tx de fiabilité.
Probabilité de réaction négative sur une personne "saine" : 0,9.
Probabilité de réaction positive sur une " "malade" : 0,8.

Quelle est la proba. pour qu'une personne (prise au hasard) ayant un test positif soit réellement malade ?
On modélise les évènements :
M^+ : personne malade. T^+ : test positif.
M^- : " "saine" T^- : test negatif.

Ce qu'on connaît : $P(M^+) = 0,3$.
$P(T^-/M^-) = 0,9$ $P(T^+/M^+) = 0,8$.

On veut calculer : $P(M^+/T^+)$
On applique la formule de Bayes.

$$P(M^+/T^+) = \frac{P(T^+/M^+) \times P(M^+)}{P(T^+/M^-) \times P(M^-) + P(T^+/M^+) \times P(M^+)}$$

$P(M^-) = 0,7$.
$P(T^+/M^-) = P_{M^-}(T^+) = 1 - P_M(T^-) = 0,1$.
$\hookrightarrow P(M^+/T^+) = \dfrac{0,8 \times 0,3}{0,1 \times 0,7 \quad 0,8 \times 0,3} = 0,775 = 77,5\,\%$

Remarque : On n'a nullement exhibé l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$!!!

2/ Indépendance.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité.

• Définition : Soit A, B dans $\mathcal{F}$.
A et B sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

• Proposition : Soit $A, B \in \mathcal{F}$, $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$. Il y a équivalence entre :
(i) A et B sont indépendants.
(ii) $P(A/B) = P(A)$. (iii) $P(B/A) = P(B)$.

⚠ Ne pas confondre indépendants et disjoints.

• Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Ces événements sont dits (mutuellement) indépendants ssi :
$\forall k \in \{2, 3, \dots, n\}$, $\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$,
$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times P(A_{i_2}) \times \dots \times P(A_{i_k})$$

⚠ mutuellement indépendants $\Rightarrow$ indépendants 2 à 2.
$\Leftarrow$ la réciproque est fausse.

• Proposition : Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$, n événements mutuellement. Alors $B_1, B_2, \dots, B_n$ sont aussi mutuellement indépendants où $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$

↳ Démonstration : $n = 2$. A_1, A_2 indépendants.
Montrons que A_1 et $\overline{A_2}$ sont indépendants.
$\Omega = A_2 \cap \overline{A_2} \Rightarrow A_1 = (A_1 \cap A_2) \underset{\text{union disjointe}}{\cup} (A_1 \cap \overline{A_2})$

$P(A_1) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap \overline{A_2})$
$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) P(A_2)$ car A_1, A_2 indépendants
$P(A_1 \cap \overline{A_2}) = P(A_1) - P(A_1) P(A_2)$
$= P(A_1) \underbrace{(1 - P(A_2))}_{P(\overline{A_2})}$

Contre-exemple : On joue à "pile" ou "face", on effectue 2 lancers ; On considère les 3 événements
A_1 {le premier lancer est "pile"}
A_2 {le deuxième lancer est "pile"}
A_3 {on a obtenu 2 "pile" ou 2 "face"}

$\Omega = \{(P,P), (P,F), (F,P), (F,F)\}$
$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
P : proba uniforme.

$\forall A \subset \Omega,\ P(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{4}.$

$A_1 = \{(P,P),(P,F)\} \Rightarrow P(A_1) = 1/2.$
$A_2 = \{(F,P),(P,P)\} \Rightarrow P(A_2) = 1/2.$
$A_3 = \{(P,P),(F,F)\} \Rightarrow P(A_3) = 1/2.$

$A_1 \cap A_2 = \{(P,P)\} \Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = 1/4 = P(A_1)P(A_2)$
↳ A_1 et A_2 sont indépendants.
$A_2 \cap A_3 = \{(P,P)\} \Rightarrow P(A_2 \cap A_3) = 1/4 = P(A_2)P(A_3).$
↳ A_2 et A_3 indépendants.
$A_1 \cap A_3 = \{(P,P)\} \Rightarrow P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3) = 1/4.$
↳ A_1 et A_3 indépendants.
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{(P,P)\}$
$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

Conclusion : A_1, A_2, A_3 sont indépendants 2 à 2, mais pas mutuellement indépendants.

3) Modèle de tirage dans une urne.

Il s'agit de modéliser l'expérience aléatoire "tirer au hasard n individus ds une pop. d'effectif total N"
↳ Une urne contient N boules numérotées de 1 à N, on en tire n au hasard. Il y a plusieurs cas possibles.

a) Tirage ordonné avec remise.
On tire successivement n boules, en les remettant entre chaque tirage (on agite l'urne entre chaque tirage). Un évènement (résultat de l'expérience) est donc un n-uplet $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ donnant les résultats successifs. $\forall i \in \{1, \dots, n\},\ b_i \in \{1, 2, \dots, n\}$.