Espace de probabilité :

$\Omega = \{1, \dots, N\}^n$

$= \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\} \times \dots \times \{1, \dots, N\}$

$= \{(b_1, b_2, \dots, b_n) \, ; \, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \, b_i \in \{1, \dots, N\}\}.$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

P : probabilité uniforme.

$\text{Card}(\Omega) = N^N$

$\forall A \subset \Omega, \; P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{N^n}.$

Exemple : On lance 3 fois une pièce de monnaie (équilibrée). Quelle est la probabilité d'obtenir 2 "piles" exactement.

Ici $N = 2$ $n = 3$

$\Omega = \{P, F\}^3$ $\text{Card}(\Omega) = 2^3 = 8$ $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

A : "Obtenir exactement 2 "piles" "

$A = \{(P,P,F), (P,F,P), (F,P,P)\}$

$P(A) = 3/8.$

R : les tirages successifs sont indépendants. Parfois, il est plus simple d'utiliser cette indépendance plutôt que le dénombrement.

b) Tirage ordonné sans remise.

On tire successivement n boules sans les remettres entre chaque tirage. Donc on suppose $n \leq N$

Un événement (résultat de l'expérience) est un n-uplet $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ où $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $b_i \in \{1, \dots, N\}$ et les b_i sont distincts $(\forall i \neq j, \, b_i \neq b_j)$

$\Omega = \{(b_1, \dots, b_n) \in \{1, \dots, N\}^n, \, \forall i \neq j, \, b_i \neq b_j\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, P : proba uniforme.

$\forall A \subset \Omega, \; P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$

$\text{Card}(\Omega) = N \times (N-1) \times \dots \times (N-n+1)$

$= \frac{N!}{n!} = A_N^n$

exemple : Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20. On tire successivement 5 boules sans remise.

Quelle est la probabilité pour que la 3ème boule tirée ait un numero ≤ 8.

Ici $N = 20$, $n = 5$.

$\Omega = \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \{1, \dots, 20\}^5 ; \forall i \neq j \; b_i \neq b_j\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\text{Card}(\Omega) = A_{20}^5 = 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 = 1\,860\,480$

A "la 3ème boule tirée porte un numéro ≤ 8"

$A = \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \Omega ; b_3 \leq 8\}$

$\text{Card}(A) = \frac{8 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$

<u>Rem</u> : les tirages successifs ne sont pas indépendants.

c) Tirage non ordonné sans remise.

On suppose $n < N$.

Cette fois-ci, on tire d'un seul coup les n boules, l'ordre ne compte pas. Un évènement peut être assimilé à une partie à n éléments de $\{1, 2, \dots, N\}$

$\Omega = \{\text{parties à } n \text{ éléments de } \{1, 2, \dots, N\}\}$.

$\text{Card}(\Omega) = C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, P : proba uniforme.

$\forall A \subset \Omega, \; P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{C_N^n}$

VARIABLES ALÉATOIRES

Idée : Lors d'une expérience aléatoire, ce qu'on observe, c'est le résultat de l'expérience.

$$\underbrace{(\Omega, \mathcal{F}, P)}_{\text{inconnu}} \xrightarrow[\text{expérience aléatoire}]{X} \underbrace{X(\omega)}_{\text{résultat de l'expérience}}$$

inconnu ensemble des aléas, ignorances etc...

résultat de l'expérience (EDV, R, ...)

1) Définitions.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de proba.

Déf : On appelle variable aléatoire une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\forall a<b \in \mathbb{R}$,

$$X^{-1}([a,b]) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in [a,b]\} \in \mathcal{F}$$

Notation : $X^{-1}([a,b]) = \{X \in [a,b]\} = \{a \leq x \leq b\}$.

Thm et définit° : On appelle loi de X, notée P_X, la proba. sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ donnée par :
$\forall a<b \in \mathbb{R}$, $P_X([a,b]) = P(X \in [a,b])$

Déf : Soit X, une variable aléatoire réelle, on appelle fonction de répartition de X la fonction notée F_X, définie de $\mathbb{R}$ dans $[0;1]$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P_X(]-\infty, x]) = P(X \leq x)$$

Propté :
(i) F_X est croissante, continue à droite

2) Etudes des v.a. discrètes.

On étudie donc les v.a à valeurs dans un ensemble discret

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

(en général, $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$)

La loi de X est donnée par les : $\forall i, p_i = P(X = x_i)$

rappel : $\sum p_i = 1$.

a) Espérance, variance.

déf : Soit X une v.a. discrète sous réserve d'existence, on appelle

* Espérance de X, la quantité :

$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$

* Variance de X :

$V(X) = \sum_i (x_i - E[X])^2 P(X = x_i)$

* Ecart-type :

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

* De façon générale, si G est une application de $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ dans $\mathbb{R}$, on pose

$$E[G(X)] = \sum_i G(x_i) P(X = x_i)$$

Remarque : * L'espérance est une notion de moyenne.

* Ainsi $V(X) = E[(X - E[X])^2]$

C'est un paramètre de dispersion.

Déf : Soit $\underline{k} \in \mathbb{N}^*$, on appelle moment d'ordre k, la quantité $E[X^k] = \sum_i x_i^k P(X = x_i)$

⚠ Si X prend une infinité de valeurs, il faut vérifier avant toute autre chose que les sommes infinies existent bien.

b) Exemples.