Le 12/10/2005

* Le lancer de dé :

X : chiffre affiché par le dé.
La loi de X est la loi uniforme sur $\{1,2,3,4,5,6\}$
$\forall i \in \{1,2,3,4,5,6\}$, $P(X=i) = 1/6$.

$$E[X] = \sum_{i=1}^{6} i P(X=i)$$
$$= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

Remarque : $\frac{7}{2} \notin \{1,2,3,4,5,6\}$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{6} (i - \frac{7}{2})^2 P(X=i)$$
$$= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} (i - \frac{7}{2})^2 = \frac{1}{6} \left\{ (\frac{5}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2 + (\frac{5}{2})^2 \right\}$$
$$= \frac{70}{24} = \frac{35}{12}.$$

* Paradoxe de St. Petersbourg.

On propose le jeu suivant
→ le joueur paie un droit d'entrée de 1000 €.
→ il prend une pièce de monnaie j → à obtenir PILE et le jeu s'arrête. Le candidat ~~dat~~ a alors gagné
2 € s'il a obtenu pile au 1er lancer.
4 € ——— 2ème ———
8 € ——— 3ème ———.
etc on multiplie par 2 le gain à chaque fois.

Si le candidat a du lancer n fois la pièce pour obtenir pile, et gagne 2^n €.
On considère ≠ v.a.
X : nb de lancers effectués pour obtenir "Pile"
X prend des valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
$P(X=1) = 1/2$, $P(X=2) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$.
$\{X = n\}$ = "On a obtenu $(n-1)$ fois Face et Pile au n-ième lancer".

$$P(X=n) = \underbrace{1/2 \times 1/2 \times \ldots \times 1/2}_{n-1 \text{ fois}} \times \underbrace{1/2}_{\text{pile au } n\text{ième lancer}} = 1/2^n.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = 1/2^n$.

On a bien $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

Le gain du joueur est $G = 2^X$.

$$E[G] = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \times P(X=n)$$
$$= 2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2^2} + \ldots + 2^n \times \frac{1}{2^n} + \ldots$$
$$= 1+1+1+1+ \ldots + 1 + \ldots$$
$$= +\infty \ !!!$$

variable sans espérance.

3/ Vecteurs aléatoires.

• déf : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle vecteur aléatoire, la donnée de n v.a. $X_1, \ldots, X_n$ définies sur le même espace de probabilité. On note alors $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Si $n=2$, on parle de couple.

Thm et Déf : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, X_i prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. La loi de $(X_1, \ldots, X_n)$ est la prob. $P_{(X_1, \ldots, X_n)}$ sur $(\mathbb{N}^n, \mathcal{P}(\mathbb{N}^n))$ telle que $\forall i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$, $P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_n = i_n)$ " $P(\{i_1, i_2, \ldots i_n\})$